Laat ze maar eens bedenken waar je die verhoudingsgetallen nog meer tegenkomt en wat het nut daarvan is.
Als ze daar niet uitkomen, kun je ze op het spoor brengen met een paar landkaarten (van de regio, van Nederland, van Europa, van de wereld). Ook een pop en een speelgoedauto zijn prima geschikt. Laat ze maar in groepjes bedenken wat die voorwerpen met verhoudingen te maken hebben. Zo kun je via het begrip 'schaal', zoals dat op de kaarten is aangegeven laten bedenken welke schaal je nodig hebt om op een A4'tje een plattegrond van het lokaal te maken. Ook zouden ze kunnen bedenken wat de schaal van die pop en dat autootje zouden kunnen zijn. Dat begrip schaal zegt dus eigenlijk: in het echt is het zoveel keer zo groot.

Er is nog een manier waarop je verhoudingsgetallen kunt tegenkomen. Dat zijn de procenten, die ze kunnen herkennen aan dat tekentje %.
Belangrijk is om dat woord te vertalen: per honderd. Alles wordt via zo'n percentage vergeleken met 100. Als je 100% hebt, heb je alles. Dat is dus evenveel als 100/100, die we ook nog kennen van de breuken. Dan bedoel je de hele winst, de hele opbrengst, de hele opkomst, enzovoort.
Wat zou het zo aantrekkelijk maken om een verhouding als een percentage te noteren?

Wat is nu het essentiële verschil tussen breuken en verhoudingsgetallen, ook al zien die er soms hetzelfde uit?

Breuken en verhoudingsgetallen

Welke kennis, vaardigheden en inzichten
moeten kinderen verwerven
om zich buiten de rekenles
te kunnen redden
met breuken en verhoudingsgetallen?

Dolf Janson
2019

Vooraf

Om succesvol rekenonderwijs te geven zijn er twee randvoorwaarden noodzakelijk.

De eerste is dat 'nieuwe' aspecten of onderwerpen die je aan de orde wilt stellen vrijwel altijd voortkomen uit en/of aansluiten bij al aanwezige voorkennis. Die voorkennis is lang niet altijd in het brein van de kinderen gelabeld als 'rekenen', maar komt vaak wel voort uit praktische ervaringen die ze hebben opgedaan buiten de school.

Het tweede uitgangspunt zou moeten zijn dat zo'n nieuw aspect of onderwerp vanaf het begin perspectief biedt op het nut en dus op de toepassing daarvan. Je leert het niet voor een toets, maar om het te kunnen gebruiken. Soms is dat eerst om verder te kunnen met grotere getallen of andere bewerkingen, maar altijd is het daarachter gericht op toepassingen buiten de rekenlessen. Dat kan in andere vakken zijn, maar meestal ligt die toepassing buiten de school. Als kinderen dat nut herkennen en daardoor begrijpen in welke situaties je dat kunt of zelfs moet gebruiken, dan geeft dat richting aan het oefenen. Daardoor kunnen ze ook veel beter zelf nagaan of ze die nieuwe doelen al hebben bereikt.

Dit geldt zeker ook voor de onderwerpen breuken en verhoudingsgetallen.

Wat hiervoor een 'hele' werd genoemd is dus een getal dat nog wel een breukstreep heeft, maar met aan beide kanten hetzelfde getal: 2/2, 3/3, 4/4 of zelfs 100/100. In al die gevallen is de waarde 1 (één). Je zou het kunnen zien als een vermomming van het getal 1. Dat kunnen dus ontelbaar veel vermommingen zijn… Het is voorlopig de bedoeling dat als ze zo'n breuk als antwoord krijgen, ze die vertalen in 1. Het zou kunnen dat ze als antwoord 12/4 krijgen, dan moeten ze dat vertalen in… precies, in 3, want de teller is drie keer zo veel als de noemer. Het is belangrijk om dat te laten verwoorden. Die breukstreep blijkt dus eigenlijk ook een deelstreep, want je kunt de teller delen door de noemer.

Verhoudingen

Het komt ook voor dat je niet precies hoeft te weten hoeveel ergens van zijn of groot iets is. Dan is het misschien veel interessanter om twee aantallen met elkaar te vergelijken. Zijn er meer toeschouwers gekomen om de thuisclub aan te moedigen dan om dat te doen voor hun tegenstander? Misschien is de verhouding tussen die twee groepen wel 1 staat tot 2: voor elke fan van de gasten zijn er twee voor de thuisclub . Je kunt dat opschrijven als 1 : 2 of als 1/3. Dan lijkt het zelfs op een breuk, want je zegt eigenlijk één van elke drie bezoekers komt voor de gasten.
Anders dan bij een echte breuk weet je dan niet over hoeveel bezoekers het gaat, want die 1/3 is geen aantal, maar een verhouding tussen twee aantallen. We noemen dit daarom verhoudingsgetallen.

Namen

Bij breuken horen ook een paar woorden die je als naam kunt gebruiken voor onderdelen van en handelingen met breuken.

De eerste namen gelden voor de twee getallen die samen een breuk vormen. Het onderste getal vertelt in hoeveel (gelijke) stukken iets is verdeeld. Dit getal geeft aan zo'n breuk de naam. Met een wat vreemd woord heet dit dan de **noemer**.
Het getal dat daarboven staat vertelt je hoeveel stukken van dat totaal er nu worden bedoeld. Stel je voor dat je 3/4 ziet staan, dan weet je dat van de vier delen die er waren er nu drie meetellen. Dit getal heeft als naam **teller**.
De streep ertussen heet heel origineel **breukstreep**… Die kan horizontaal of diagonaal tussen teller en noemer staan.

Breuken hebben hun grenzen. Als er evenveel stukken zijn als waarmee je begon, dus als teller en noemer hetzelfde getal hebben, dan is de waarde gewoon 1 (één). Eigenlijk is het dan geen breuk meer.

Als je de stukken, die een paar breuken aangeven, bij elkaar doet (optelt), dan kan de teller meer stukken krijgen, dan de noemer aangeeft. Dan staat er bijvoorbeeld 7/4. Dan is het geen echte breuk meer, want de teller is te groot. Eerst moet je dan de hele eruit halen. In dit voorbeeld is een hele 4/4. Dan reken je dus uit: 7/4 - 4/4 = 3/4, want alleen de teller telt… De onechte breuk 7/4 blijkt dan **1 3/4** te betekenen: dat is een hele en nog drievierde.

Voorkennis

Veel kinderen zullen als ze de bovenbouw binnenkomen al allerlei woorden kennen die verwijzen naar breuken of verhoudingen. Zo zullen woorden als 'helft' en 'half' of 'halve' al bekend zijn en gekoppeld worden aan concrete situaties. Ook begrippen als 'doormidden' of 'halverwege' zullen veel kinderen al gebruiken of op zijn minst begrijpen.

Daarom is het verstandig eerst die taal die verwijst naar breuken en/of verhoudingen als uitgangspunt te nemen, omdat dit de voorkennis is waarbij je kunt aansluiten.

Wat is 'de helft' of 'een halve'? Daarop zullen veel kinderen een antwoord kunnen geven, met woorden, met een tekening en/of met voorbeelden van situaties waarin je zo'n woord gebruikt.

Laat ze dat eerst alleen bedenken, dan uitwisselen met een andere leerling en inventariseer dan wat ze hebben bedacht en uitgebeeld. Ziet 'de helft' of 'een halve' er in al die voorbeelden er hetzelfde uit? Wat zijn overeenkomsten en wat zijn verschillen?

Het gesprek hierover biedt waarschijnlijk ook al een blik op het nut van kennis over deze termen. Er zijn veel situaties waarin je dergelijke woorden gebruikt omdat ze daar betekenis hebben.

De kern van de conclusie zal zijn dat er twee dingen zijn, die op de een of andere manier bij elkaar horen, en dat je dan een van die twee bedoelt.

Als je daar verder op doorgaat zal blijken dat het belangrijk is dat het om twee gelijke dingen of delen gaat, of in ieder geval twee van dezelfde soort. Ze vormen dan een geheel of ze horen bij elkaar. De helft is dan 'een van de twee'. Dat maakt meteen duidelijk waarom je dat schrijft als ½ of $\frac{1}{2}$.

Op basis hiervan kunnen ze vast ook wel bedenken hoe het er uitziet als je 'een van de drie' of 'een van de vier' bedoelt. Steeds gaat het om een groepje van dat aantal bij elkaar horende mensen, dieren of dingen of delen van een geheel. Als je daarmee wilt rekenen, dan moeten die twee, drie of vier wel gelijk of van dezelfde soort zijn, anders is de kans groot dat het niet gaat lukken.

Kunnen ze uitleggen waardoor dat dan niet kan? Als je zegt dat 1 + 1 = 2, moet wel duidelijk zijn wat die '2' dan is geworden. Dat zijn dan twee … Als je dit niet duidelijk kunt benoemen, ben je door dat optellen niet wijzer geworden. Als je er (om dat op te lossen) een andere naam aan moet geven dan je voor die losse enen gebruikte, dan is het door dat optellen misschien ook niet duidelijker geworden. Een appel en een peer zijn samen twee vruchten, maar als ik 'twee vruchten' hoor weet ik niet waaraan ik dan moet denken. Het bij elkaar optellen is dan niet helpend.

Gaan we weer even terug naar 'de helft'. Dat kan dus iets zijn dat je doormidden knipt of snijdt, maar het kan ook de helft zijn van een route die je fietst of loopt.

Het moet duidelijk zijn dat gelijke stukken of dezelfde soort van iets, bij elkaar opgeteld of van elkaar afgetrokken kunnen worden,

Als een leerling uit een tafelgroepje van vier vertrekt, dan kun je vrij eenvoudig vertellen dat één van de vier is vertrokken en dat er dan nog drie van dat viertal over zijn.

Als twee van zulke restgroepjes samengevoegd worden, dan spelen er twee aandachtspunten een rol:

a. kun je het groepje toen het nog compleet was als een geheel zien en daardoor 'één' noemen
b. als dat inderdaad het geval is, zijn die groepjes dan precies evengroot geweest?

Als dit allebei klopt dan mag je de overgebleven aantallen bij elkaar zetten en die aantallen optellen:

3/4 + 3/4 = 6/4 = 1 2/4 = 1 1/2 .

Die laatste stappen moeten de leerlingen echt voor zich zien. Er zijn 6 leerlingen afkomstig uit twee groepjes van 4 leerlingen. Daarmee kun je weer één groepje compleet maken en dan houd je er nog twee van het andere viertal over: 1 2/4 .

Als je die twee leerlingen aan de tafels van het andere groepje zet, dan zie je dat daar nu de helft van de tafeltjes bezet zijn. Dan kun je dus deze conclusie trekken: 1 2/4 = 1 1/2

Door dit eerst te laten ervaren en beschrijven wordt duidelijk wat het betekent als je een breuk vereenvoudigt of helen uit een overvolle breuk haalt. Vereenvoudigen is dan nog geen rekenhandeling.

Nu komt het moment dat we zo'n verdeling van samenhangend geheel in gelijke delen een naam gaan geven. We noemen dit een breuk, omdat een 'geheel' in stukjes is gebroken.

Breuken zijn vanuit deze ervaringen wel betekenis te geven. Die pannenkoek of die pizza is echt niet nodig om duidelijk te maken dat je een 'geheel' in gelijke stukken of groepjes kunt verdelen.

Er is echter nog iets bijzonders aan die breuken. Zodra je bijvoorbeeld ¾ herkent als het getal, dat je gebruikt als je van de vier stukken (of groepsleden, of…) er drie bedoelt, dan betekent dit dat je de betekenis van een nieuw soort getallen hebt ontdekt. Die vier stukken (of kinderen van een tafelgroepje) in het voorbeeld vormen samen een geheel en dat is daardoor één. Je moet dan herkennen dat je vier stukken (of groepsleden) die samen een geheel vormen, niet als 4 aanduidt, maar als 1. Je zegt dus eigenlijk: 4/4 = 1.

Tot nu toe was 1 het kleinste getal, want als je minder had dan 1, dan was het 0. Nu komen er dus getallen bij die kleiner zijn dan 1, maar wel groter dan 0. Dat is bijzonder.

Is dat ook handig?

Wat zou je hebben aan zulke kleine getallen?

Het gaat er bij het gebruik van breuken steeds weer om dat je herkent (of afspreekt) wat je als één ziet. Dat kan een taart zijn, die je in 12 stukken snijdt, maar ook de hele groep met 28 leerlingen of de hele school met 16 groepen of 4 units.

Dan ben je 'halverwege', wat letterlijk zoiets als 'op de helft van de weg ergens heen' betekent. Wat zou dan 'halverwege de les' of 'halverwege het boek' betekenen?

Laat ze vervolgens eens bedenken wat het betekent als je ergens leest of hoort dat 'de helft van de vissen in de vijver is doodgegaan'.

Dan betekent dit natuurlijk niet dat al die vissen doormidden zijn gesneden. Dan gaat het om de helft van het aantal vissen in die vijver en niet om de helft van elke vis.

Het is dus erg belangrijk dat ze bij dit soort begrippen de juiste beelden hebben of krijgen. Om dit te bevorderen is het aan te bevelen dat ze al die betekenissen ergens noteren en afbeelden. Dat kan in een eigen logboek, maar het kan eventueel ook via posters en een tentoonstelling in een hoek in het lokaal of elders in de school, waaraan alle op dat moment deelnemende leerlingen een bijdrage leveren.

Het gebruik van de juiste termen en daaraan de juiste invulling geven maakt dat dit ook in hun denken en geheugen wordt verbonden met de juiste mentale beelden. Dit is essentieel om hierover ook op wat langere termijn te kunnen blijven beschikken.

Meer stukken…

Op basis van deze wat uitgebreide verkenning van situaties waarin je spreekt van de helft of een halve, kan dit verschijnsel verder worden verkend. Dan gaat het om verdelingen in andere aantallen.

Wat is gemakkelijk in drieën te verdelen? Een cirkel in precies drie gelijke stukken verdelen (bv. om die zo te versieren) is niet erg eenvoudig zonder hulpmiddelen.

Op basis van hun voorkennis over delen kunnen ze natuurlijk wel aantallen noemen die wel handig in drie gelijke groepjes te verdelen zijn.

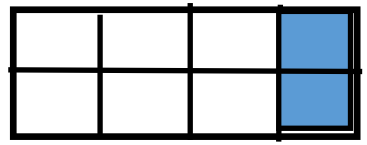
Ook op voorwerpen die al een structuur hebben die zich daarvoor leent, zoals deze chocoladerepen, is 'een van de drie' goed aan te wijzen. Bij de hier afgebeelde repen kan dat zelfs op twee manieren.

Het is goed om bij dit soort opdrachten te laten bedenken waarom je dat zou willen doen. Waarom zou je willen weten wat of hoeveel een van drie stukken chocoladereep is? Wat is hier 'een van de drie' of 'twee van de drie'? Want als je weet in hoeveel (gelijke) stukken of groepjes iets is verdeeld, dan kun je ook kijken naar wat je overhoudt als je een deel wegpakt of apart zet.

In het verlengde hiervan kun je de kinderen meer verdelingen laten bedenken en tekenen of maken. Het is dan wel goed om met hen stil te staan bij de vraag welke verdelingen in het echt vaak zullen voorkomen en welke verdelingen bijna nooit gebruikt zullen worden. Dat vraag natuurlijk ook om argumenten daarvoor.

Verdelingen in kleine hoeveelheden, zoals, 2, 3, 4, of 5 komen relatief veel voor.

Die kun je snel overzien, daarmee is eenvoudig te rekenen en die nemen niet veel ruimte in. Een verdeling in 7 is, afgezien van de dagen van een week, niet zo praktisch. Dat komt niet alleen doordat 7 een oneven getal is, maar het is ook een priemgetal, zodat het niet verder te verbinden is met andere verdelingen. Iets verdelen in 8 stukken blijkt dan veel handiger, want dat is verbonden met 4 en met 2, zodat een verdeling in achtsten in veel gevallen is samen te voegen naar een verdeling in vierden of zelfs in tweeden (halven). Als uit een verdeling in achtsten twee achtsten zijn gekleurd, dan zijn er zes achtsten over, maar dat kun je ook zien als drie vierden.



Dat hierbij ook de vertaling naar tiendelige breuken of naar percentages een belangrijke rol speelt, is nu nog niet aan de orde. Dit speelt bij die voorkeur voor bepaalde verdelingen natuurlijk wel mee en is zeker iets om later op terug te komen.

Breuken

We hebben het tot nu toe gehad over delen van een geheel, die we bij een tweedeling benoemden als 'een van de twee' of als 'een tweede' of 'de helft'. Daarna zijn die verdelingen ook bij wat grotere aantallen verkend en zichtbaar gemaakt.