

In dit artikel staan, bekeken vanuit de inhoud en de organisatie van rekenonderwijs, de kernpunten beschreven die ervoor zorgen dat kinderen in een actieve lerende stand komen en blijven tijdens het ontwikkelen van rekenvaardigheid.

Uitgangspunten voor effectief rekenonderwijs

Alle leerlingen hebben voordat ze als vierjarige naar school gaan op allerlei manieren al kennis gemaakt met hoeveelheden, getallen en cijfers. Dikwijls maakten ze ook al een beetje kennis met toepassingen daarvan, zoals maten en prijzen.

Dit betekent dat die voorkennis voor elke leerling de start moet zijn voor activiteiten op school, zodat die leiden tot bewustwording, verdieping en verbreding van die voorkennis. Daarbij is het van belang je te realiseren dat die ervaringen bij hen zelden het etiket 'rekenen' zullen hebben.

Dit betekent dat kinderen de kans moeten krijgen om n.a.v. besproken ervaringen, bekeken beelden vanuit thema's en deelname aan allerlei spel-activiteiten, op een onderzoekende manier grip te krijgen op de rol van aantallen, en van patronen die verband houden met hoeveelheden en/of maten. Waar mogelijk doen ze dat samen met een of twee anderen, zodat niet alleen het verwoorden van die experimenten vanzelfsprekend is, maar ook dat ze elkaar op ideeën kunnen brengen en op elkaars ervaringen kunnen reflecteren en daarover verder denken.

Hierbij is het essentieel dat het niet slechts gaat om dat ene juiste antwoord of om steeds dezelfde standaardoplossingen, maar vooral om de keuze van manieren om daar te komen en de onderbouwing daarvan. Daarom is het ook belangrijk dat zij die in hun groepje met elkaar bedenken en verwoorden.

Dit betekent dat bij de begeleiding daarvan, hierop het accent moet liggen. Door op basis hiervan, als onderwijsgevende je nieuwsgierigheid daarnaar te tonen, stimuleer je hen dit te demonstreren en verwoorden. Het effect moet steeds zijn, dat de kinderen zelfvertrouwen ontlenen aan hun activiteiten en steeds weer uitgedaagd worden om verder te gaan met de verdieping ervan, maar ook met het ontdekken van verbanden en toepassingsmogelijkheden. Hierdoor zullen ze zich eigenaar gaan en blijven voelen, waardoor zij in die actieve lerende stand kunnen functioneren, mits ze daartoe de ruimte krijgen en zich daarin gestimuleerd en gesteund voelen.

Dit betekent dat het niet gaat om taken (af)maken, maar om meer te weten komen, vaardiger te worden en zo te ontdekken wat in welke situatie een handige toepassing is. Het accent kan zo blijven liggen op doorontwikkelen, maar wel met het 'eigenaarschap' van die activiteiten als kenmerk daarbij.

Dit betekent ook dat het alleen gaat om formatieve evaluatie van de individuele leerprocessen. Dit betekent dat de voortgang en de effecten van het leerproces van een leerling alleen met dat van die leerling zelf vergeleken wordt en niet met die van andere leerlingen. Dit geeft niet alleen een goed beeld van die doorgaande ontwikkeling, maar scheidt ook een veilig klimaat voor elke leerling, doordat het nooit gaat om vormen van concurrentie.

Cijfers

Het door ons gebruikte getallensysteem kent tien cijfers: 0 t/m 9. Daarmee kunnen alle getallen worden weergegeven, ongeacht of ze heel of gebroken zijn.

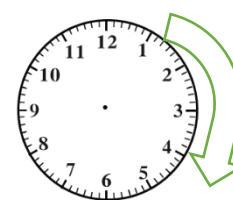
De namen die bij de getallen horen zijn eveneens gekoppeld aan die series van 0 t/m 9. Na het getal negen volgt tien. Die komt daardoor aan het begin van de volgende regel, want daarin zijn nu weer nul eenheden. Dat tiental maakt ook dat er hier twee cijfers nodig zijn. Daarnaast speelt ook de taal een rol, want deze serie heeft 'tien' in de namen (afgezien van elf en twaalf, die we uit een ander talstelsel hebben overgehouden). Deze serie eindigt ook met de negen: 19, want daarna komt er weer een serie die begint met de nul, en ook met een nieuwe naam: twintig. Zo gaat dit steeds op dezelfde manier verder. Ook al hebben getallen twaalf cijfers nodig om de bijbehorende hoeveelheid weer te geven, de systematiek bestaat nog steeds uit die serie 0 t/m 9, die dan op elke positie van een getal wordt toegepast: bij de eenheden, bij de tientallen, bij de honderdtallen, bij de duizendtallen, enzovoort...

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119

De ordening van getallen en cijfers

Kinderen die net vier jaar zijn geworden komen voor het eerst naar school. Grote kans dat het cijfer 4 daardoor in ieder geval (een beetje) bekend is en ook dat ze weten waarnaar dat cijfer verwijst. Dit kan dan een simpele ingang zijn om de aangrenzende getallen ook even aan de orde te stellen: hoe oud was je voordat je vier werd? Hoe oud ben je als je weer jarig bent? Welke cijfers zouden daarbij horen?

Dit illustreert dat er altijd voorkennis is, maar ook dat die niet altijd even bewust en/of onderbouwd is. De volgorde van de eerste getallen is ook af te lezen van de wijzerplaat van een traditionele klok. Ook dat kan een aspect van de voorkennis zijn, al zal een kleuter de eigen leeftijd meestal niet direct koppelen aan de cijfers op een klok. Het leuke is wel dat het in beide gevallen over tijd gaat: jaren



en uren. Zo'n ontdekking helpt dan weer om samenhang als een aandachtspunt mee te nemen bij volgende ontdekkingen.

Dit is dus een onderwerp voor een gesprek, dat in de eerste weken van de start op school gevoerd moet worden. Als er in die periode een paar kinderen beginnen, dan is het goed om hen samen te nemen en hen met open vragen te stimuleren die recente ervaringen te delen.

Vanuit een dergelijk startgesprek over getallen en cijfers en hun eigen ervaringen daarmee, kunnen dan later allerlei vervolggerekjes plaatsvinden. Het is aan te raden dit ook te doen n.a.v. spelactiviteiten, zoals bouwen met houten blokken of lego, het gebruik van een dobbelsteen of een spel met dominostenen. Ook kan je hen uitdagen een poppenkast te gebruiken om iemand te spelen voor wie getallen belangrijk zijn. Ook binnen de thema's die aan de orde komen kunnen dergelijke gesprekjes met kleine groepjes heel stimulerend zijn. Het voordeel is dan ook dat het dan niet alleen gaat om rekenaspecten, maar ook om taalaspecten. Bovendien kan het klimaat dat zo ervaren wordt heel stimulerend zijn, doordat het veilig is. Het gaat erom met je groepje ervaringen uit te wisselen, dingen uit te proberen en zo te merken dat jouw inbreng ook meehelpt, terwijl die inbreng van anderen ook interessant kan zijn en je op ideeën brengt. Dit vraagt wel om het prikkelen van nieuwsgierigheid en het waarderen van meedoen met uitproberen en naar elkaar luisteren. Het gaat dan niet om het weten van dat ene antwoord, maar om actieve manieren om in de richting van een oplossing te komen. Als zo'n manier is ontdekt en uitgeprobeerd, kan die aanpak vaker worden gebruikt, totdat ze ontdekken wanneer die manier niet meer zo handig is en een aangepaste aanpak nodig is. Anders gezegd: kinderen moeten dagelijks kunnen ervaren dat 'leren' vraagt om denken, waarnemen, verwoorden en uitproberen. Op basis daarvan kan dan dat inzicht of die vaardigheid toegepast worden en verder worden verdiept en uitgebreid.

Samenhang herkennen

Op basis van die bewuste leerervaringen kan dan het samenvoegen of verwijderen van zo'n aantal ($t/m10$) volgen. Daarbij is het belangrijk dat die handeling en het benoemen en opschrijven steeds gecombineerd worden. Dat verwijderen kan ook bedekken zijn, zodat het totaal toch snel weer zichtbaar te maken is.

Hierbij gaat het er ook om te ontdekken dat $5 + 3 = 8$ ook omgekeerd kan worden naar $8 - 3 = 5$, maar ook vanaf de andere kant begonnen kan worden: $3 + 5 = 8$.



Door de leerlingen die hieraan toe zijn uit te dagen zelf ook zulke combinaties te bedenken en te noteren, zullen ze ontdekken dat zo bij elk 'plaatje' vier van die sommetjes laten zien wat daar gebeurt. Dat is meer dan een spelletje, want daardoor leren ze dat je met getallen en met bewerkingen flexibel kunt omgaan. Daardoor ontdekken ze niet alleen dat je dit op allerlei manieren kunt toepassen,

maar ook dat er allerlei verbanden zijn tussen getallen en de bewerkingen daarmee. Als je weet dat $8 = 4 + 4$, dan is $8 = 5 + \dots$ daarvan simpel af te leiden, mits je van die voorkennis gebruik durft te maken en je die oplossing durft te beredeneren i.p.v. slechts een mogelijk antwoordje te noemen of te noteren.

Dit principe van voortbouwen op voorkennis en gebruik maken van de relatie tussen getallen en tussen bewerkingen kan op deze manier vanzelfsprekend worden. Dit vraagt wel ruimte om zelf verschillende manieren te bedenken en die dan uit te proberen. Zo ontstaat bij een leerling ook bij dit vakgebied 'leerkracht' en voedt dit dat belangrijke gevoel van eigenaarschap. Dat leidt tot een actieve leerhouding, mits je hen daarbij begeleidt en voedt met vragen en impulsen tot blikverruiming.

Optellen en aftrekken

Het oefenen van optellen en aftrekken moet vanaf het begin steeds gecombineerd worden, zodat de leerlingen het daardoor vanzelfsprekend vinden dat met dezelfde combinatie van drie getallen in een som, vier sommetjes ontstaan: tweemaal optellen en tweemaal aftrekken. Hierdoor kunnen ze al snel flexibel met die getallen aan de slag.

Eerst gaat het om het automatiseren van de sommen met de getallen 0 t/m 9. Als het uitrekenen daarvan vlot lukt, bv. door gebruik te maken van een omkering of van een 'aangrenzende' som, dan kan verder geoefend worden met het memoriseren, het weten van het derde getal. Dit hoeft niet eens altijd het getal achter het is-gelijk-teken te zijn. Als dat ook lukt kan de stap naar de getallen 10 t/m 19 worden gemaakt. Ook dat gaat dan op dezelfde manier in twee fasen. Belangrijk is dan, dat ze bewust gebruik maken van de verworven voorkennis met die voorafgaande getallen.

Als ook met deze getallen de beide bewerkingen gememoriseerd zijn, gaat het oefenen verder met de getallen 20 t/m 99. Belangrijk is dan dat ze gebruik maken van de overeenkomsten met de al verworven sommen. Als je weet dat $12+7=19$, dan is $32+17$ niet ineens veel moeilijker om uit te rekenen. Het gaat bij deze getallen alleen om het automatiseren van handige manieren van uitrekenen. Dit betekent dus zowel rekenen met de tientallen als met de eenheden en daarbij steeds gebruik maken van wat ze al weten en ook die verbanden tussen getallen handig benutten.

Het verdient aanbeveling ook bij deze sommen direct de andere drie varianten te laten vermelden. Als kinderen in duo's samenwerken kan dit mondeling en vraagt dit van de partners over en weer oplettendheid. Het voordeel hiervan is bovendien dat het niet gaat om het noemen van iets dat al in een antwoordenboekje staat, maar dat ze samen naar elkaar verantwoording moeten kunnen afleggen over de juistheid van wat een van hen noemt.

Je rol als onderwijsgevende

Mogelijk dat je inmiddels bent geschrokken van de ruimte die kinderen volgens deze aanpak krijgen om hun eigen weg te gaan bij het verwerven van rekenvaardigheid. Hoe krijg je niet alleen overzicht, maar houd je ook invloed op wat de kinderen alleen of samen met een of twee anderen aanpakken?

Het betekent bijvoorbeeld dat je ervoor zorgt dat je elke leerling (samen met de een of twee anderen, waarmee ze in die periode samenwerken bij het rekenen, ten minste eenmaal per week kan observeren en met hen bespreken wat ze doen en wat hen dat oplevert. Op zo'n moment gaat het dus niet om een traditionele 'instructie', maar om een gesprek. Dat begint met nieuwsgierige vragen naar hun ervaringen, waarbij het dus niet gaat om een sociaal wenselijk antwoord, maar om de eigen ervaring van elk lid van dat groepje. Die nieuwsgierigheid moet dan zowel blijken uit de manier waarop je doorvraagt, als uit de manier waarop je op hun verhalen reageert. Er moet uit die reactie niet alleen begrip blijken voor verschillen die kunnen optreden binnen zo'n groepje, maar het moet ook de anderen uitdagen die ervaring van hun maatje te herkennen en te kunnen verklaren.

Op basis van die reacties en gedeelde ervaringen, kun je als onderwijsgevende feedback geven en zondig nog wat doorvragen bij de anderen. Vervolgens kun je dan die inbreng samenvatten en de kernpunten benadrukken. Dat is dan de basis voor het volgende perspectief waaraan ze samen gaan werken. Ook kan dan blijken dat een of meer van hen ook individueel bepaalde aspecten nog gericht wat moeten oefenen. Ook kan het zinvol zijn, dat ze eerst apart nog wat aspecten verder onderzoeken, om dan daarna die ervaringen samen te bespreken en zo tot conclusies te komen. Daarbij is het steeds van belang dat het niet slechts wordt ervaren als een taak die af moet. De kern moet voortdurend zijn, dat ze stappen zetten in hun eigen leerproces en zelf snappen wat die stappen hen moeten opleveren.

Samenhang leidt tot een andere leerlijn

Door die samenhang tussen getallen en tussen bewerkingen vanaf het begin een centrale rol te geven bij het onderzoeken, ontdekken en oefenen van elke leerling, zal blijken dat dit ook leidt tot een andere opbouw. Niet alleen zullen die stappen op weg naar inzicht, kennis en vaardigheid niet bij ieder op dezelfde manier of in hetzelfde tempo verlopen. Dit is niet slechts te wijten aan intelligentie. Ook ervaringen, gewoontes en interesses spelen hierin mee. Wie zich aangetrokken voelt tot voetbal, zal een speciale associatie hebben bij dat getal elf: een keeper en tien spelers. Zulke beelden helpen ook om de structuur van zo'n hoeveelheid sneller te herkennen.

Dit speelt ook bij het vermenigvuldigen en delen. Vermenigvuldigen bouwt voort op optellen en delen op aftrekken. Het gaat daarbij dan steeds om het optellen of aftrekken van gelijke hoeveelheden. Als leerlingen dit herkennen, dan is het

ook logisch dat vermenigvuldigen en delen net zo samenhangen als optellen en aftrekken. Als $3 \times 2 = 6$, dan zal 2×3 ook 6 zijn, maar dan geldt ook dat $6 : 2 = 3$ en dus ook $6 : 3 = 2$.

Dit heeft ook direct gevolgen voor het aanbieden van de tabellen met deze bewerkingen. Je biedt het niet alleen niet aan als 'tafel' (dus als een compleet rijtje sommen van $1x$ t/m $10x$), maar je biedt direct een lege tabel aan met beide bewerkingen, zoals die hiernaast is afgebeeld.

	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=
	x	=	:	=

De leerlingen die hieraan toe zijn, kunnen dan de getallen invullen en dat derde getal op een eigen manier vinden.

Hierdoor zal heel snel duidelijk worden dat als ze in de linker tabel de drie getallen naast elkaar hebben gevonden, ze bij de deeltabel niets meer hoeven uit te rekenen. Het kan zelfs gebeuren dat een leerling eerst de deeltabel probeert in te vullen en op basis daarvan de vermenigvuldigtafel afmaakt.

Juist die ruimte om van hun dan al verworven inzichten in die samenhang tussen getallen en tussen bewerkingen gebruik te maken, stimuleert niet alleen hun betrokkenheid, maar zorgt ook voor basiskennis die veel dieper verankerd is dan een rijtje weetjes. Het instampen van 'tafels' is daarmee verleden tijd. De basis is steeds het inzicht in de samenhang binnen en tussen de tabellen, want dat maakt het niet alleen mogelijk om daarna ook met grotere getallen de juiste stappen te zetten, maar helpt ook om via $8 \times 3 = 24$ snel te komen tot $3 \times 8 = 24$. Hierdoor kunnen ze al snel steeds meer lege plekken in die acht dubbele tabellen invullen. Het zijn er acht, omdat een tabel van nul niet relevant is en de tabel van één ook niets nieuws oplevert. Het gaat dus vooral om de tabellen van twee t/m negen. De tabel van tien voegt ook weinig toe, doordat in elke tabel daarvoor al $10x$ voorkomt, waardoor ze hebben ontdekt dat 10×3 leidt tot een drie met een nul erachter en dat dit bij elke tabel zo gaat bij de laatste som. Dit is dus niet iets om via een instructie uit te leggen, maar vooral iets om zelf te laten ontdekken en om in het nagesprek te laten door de leerlingen te laten uitleggen.

Als het verwerven van de basis van het leren rekenen voor elke leerling op deze manier mogelijk wordt gemaakt, dan zullen grotere getallen daarna niet tot stagnatie leiden, mits ze op dezelfde manier daarmee verder kunnen.

De essentie is een veilige sfeer, waarin kinderen niet onderling worden vergeleken en geëtiketteerd, maar allemaal kunnen rekenen op steun als dat even nodig is. Verder betekent dat 'zich echt eigenaar kunnen voelen' niet dat de inhoud en de richting van hun leerproces er niet toe doet. Een gerichtheid op het toepassen van deze inzichten, kennis en vaardigheden zou als perspectief steeds aanwezig moeten zijn. Via thematisch onderwijs kun je dit laten ervaren.